

# Sur le calcul de l'entropie des sous-shifts multidimensionnels de type fini (SFT)

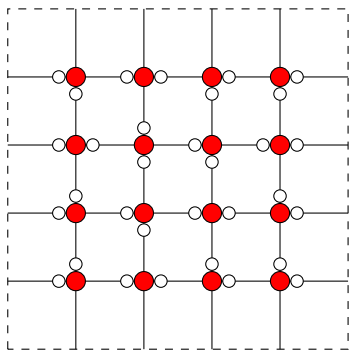
Silvère Gangloff

Institut de mathématiques de Toulouse

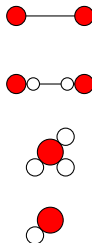
Août 1, 2018

# I. Physique statistique et systèmes discrets

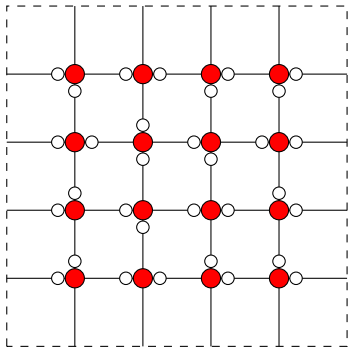
États stables de la glace [Pauling-Lieb]:



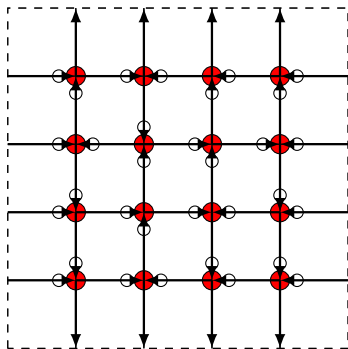
Interdits:



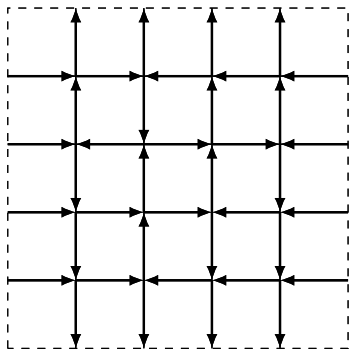
Représentation par tuiles:



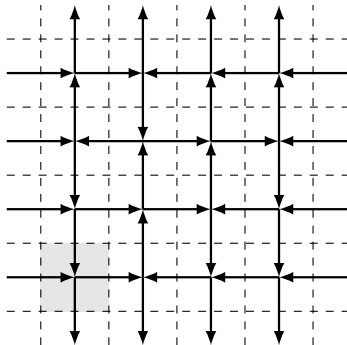
Représentation par tuiles:



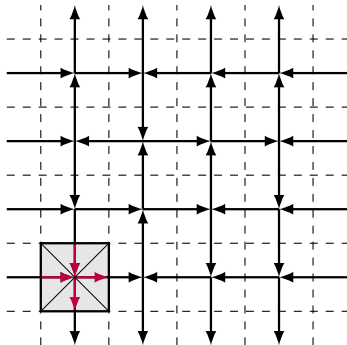
Représentation par tuiles:



## Représentation par tuiles:

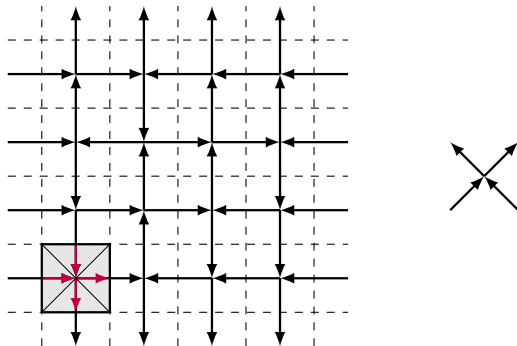


## Représentation par tuiles:

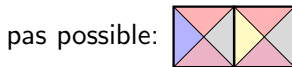
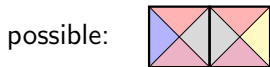
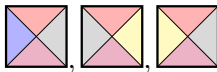




## Représentation par tuiles:



## Tuiles de H. Wang (1960'):



**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

Ex: **Hard square shift**, ou hard core model.

**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

Ex: **Hard square shift**, ou hard core model.

Motifs interdits  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

Ex: **Hard square shift**, ou hard core model.

Motifs interdits  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
1	0	0	0	0

**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

Ex: **Hard square shift**, ou hard core model.

Motifs interdits  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
0	0	0	0	0

**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

Ex: **Hard square shift**, ou hard core model.

Motifs interdits  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
1	0	1	0	0
0	0	0	0	0

**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

Ex: **Hard square shift**, ou hard core model.

Motifs interdits  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	oups
1	0	1	0	0	
0	0	0	0	0	



**SFT** (sous-shift de type fini): sous ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , défini par ensemble fini de **motifs interdits**.

Ex: **Hard square shift**, ou hard core model.

Motifs interdits  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
1	0	1	0	0
0	0	0	0	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

0	0
1	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

0	0
0	1

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	0
0	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

### **Tuiles libres**

0	1
0	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

0	1
1	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

### **Tuiles libres**

1	0
0	1



*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

0	0
1	1

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

0	1
0	1

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
0	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	0
1	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	0
1	1

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

### **Tuiles libres**

0	1
1	1

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
1	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
0	1



*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

### **Tuiles libres**



*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**



$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

### **Tuiles libres**



$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**



$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**



*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
1	1

$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**

0	0
1	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
1	1

$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**

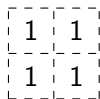
0	0
0	1

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**



$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**



*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
1	1

$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**

0	1
0	0



*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
1	1

$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**

0	1
1	0

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**

1	1
1	1

$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**

1	0
0	1

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**



$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**



$$N_2(X) = 7$$

*Calcul des constantes physiques du système?*

**Entropie:** "quantité d'états possibles".

$N_n(X)$ : nombre de motifs carrés de taille  $n$  observables.

**Tuiles libres**



$$N_2(X) = 2^{2^2}$$

$$N_n(X) = 2^{n^2}$$

**Hard core**



$$N_2(X) = 7$$

$$N_n(X) = 2^{n^2(h(X)+o(1))}$$

Entropie d'un SFT  $X$ :

$$h(X) = \inf_{n \geq 1} \frac{\log_2(N_n(X))}{n^2}$$

**Tuiles libres**

$$h = 1$$

**Hard core**

$$h \geq 1/2$$

**Glace [Lieb 67]**

$$h = (4/3)^{3/2}$$

Entropie d'un SFT  $X$ :

$$h(X) = \inf_{n \geq 1} \frac{\log_2(N_n(X))}{n^2} = \inf_n \frac{\log_2(N_n^{loc}(X))}{n^2}$$

**Tuiles libres**

$$h = 1$$

**Hard core**

$$h \geq 1/2$$

**Glace [Lieb 67]**

$$h = (4/3)^{3/2}$$

Entropie d'un SFT  $X$ :

$$h(X) = \inf_{n \geq 1} \frac{\log_2(N_n(X))}{n^2} = \inf_n \frac{\log_2(N_n^{loc}(X))}{n^2}$$

**Tuiles libres**

$$h = 1$$

**Hard core**

$$h \geq 1/2$$

**Glace [Lieb 67]**

$$h = (4/3)^{3/2}$$

Calculable par le haut:



Entropie d'un SFT  $X$ :

$$h(X) = \inf_{n \geq 1} \frac{\log_2(N_n(X))}{n^2} = \inf_n \frac{\log_2(N_n^{loc}(X))}{n^2}$$

**Tuiles libres**

$$h = 1$$

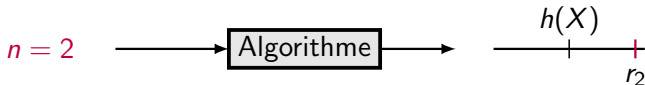
**Hard core**

$$h \geq 1/2$$

**Glace [Lieb 67]**

$$h = (4/3)^{3/2}$$

Calculable par le haut:





Entropie d'un SFT  $X$ :

$$h(X) = \inf_{n \geq 1} \frac{\log_2(N_n(X))}{n^2} = \inf_n \frac{\log_2(N_n^{loc}(X))}{n^2}$$

**Tuiles libres**

$$h = 1$$

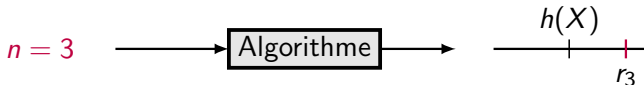
**Hard core**

$$h \geq 1/2$$

**Glace [Lieb 67]**

$$h = (4/3)^{3/2}$$

Calculable par le haut:



Entropie d'un SFT X:

$$h(X) = \inf_{n \geq 1} \frac{\log_2(N_n(X))}{n^2} = \inf_n \frac{\log_2(N_n^{loc}(X))}{n^2}$$

**Tuiles libres**

$$h = 1$$

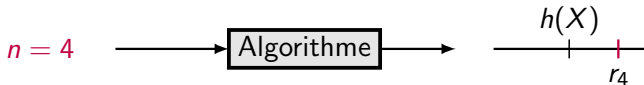
**Hard core**

$$h \geq 1/2$$

**Glace [Lieb 67]**

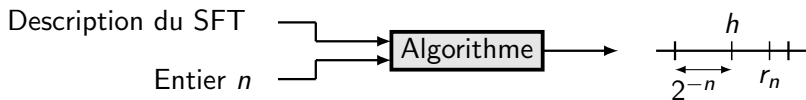
$$h = (4/3)^{3/2}$$

Calculable par le haut:



Existe-t-il une "méthode universelle" pour calculer l'entropie des SFT?

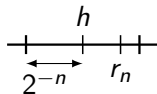
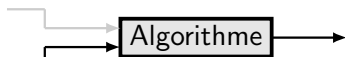
Existe-t-il une "méthode universelle" pour calculer l'entropie des SFT?



Implique la calculabilité:

Description du SFT

Entier  $n$



## II. Non-calculabilité de l'entropie

## Théorème (Hochman, Meyerovitch 2010)

*Les valeurs possibles de l'entropie des SFT bidimensionnels sont les nombres **calculables par le haut**.*

## Théorème (Hochman, Meyerovitch 2010)

*Les valeurs possibles de l'entropie des SFT bidimensionnels sont les nombres **calculables par le haut**.*

Car en particulier ces nombres incluent des **nombres non-calculables**.



## Théorème (Hochman, Meyerovitch 2010)

*Les valeurs possibles de l'entropie des SFT bidimensionnels sont les nombres calculables par le haut.*

Car en particulier ces nombres incluent des **nombres non-calculables**.

**Exemple:**

$$\sum_{k \in \mathcal{H}} 2^{-k},$$

## Théorème (Hochman, Meyerovitch 2010)

*Les valeurs possibles de l'entropie des SFT bidimensionnels sont les nombres **calculables par le haut**.*

Car en particulier ces nombres incluent des **nombres non-calculables**.

**Exemple:**

$$\sum_{k \in \mathcal{H}} 2^{-k},$$

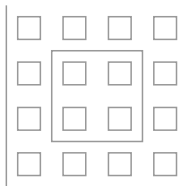
$\mathcal{H}$ : programmes qui ne s'arrêtent jamais sur l'entrée  $n = 0$ .

Résumé de preuve:

- Implémentation de calcul

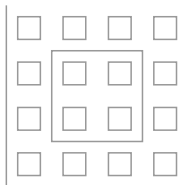
Résumé de preuve:

- Implémentation de calcul dans des **structures hiérarchiques**.



Résumé de preuve:

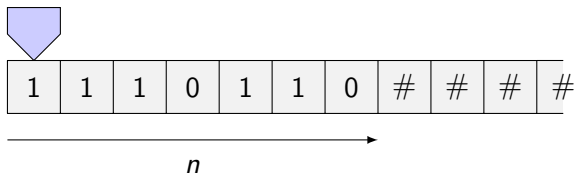
- Implémentation de calcul dans des **structures hiérarchiques**.



- qui **contrôlent les degrés de liberté** (ex: spin) de particules (ex: électrons).

# Machine de Turing: représentation d'un programme. Exemple:

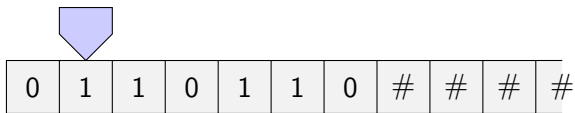
$n \mapsto n + 1$ :



$\delta :$	□ 0	□ 1	$\rightarrow$
	□ 1	□ 0	$\rightarrow$
	□ 0, 1	□ 0, 1	$\rightarrow$
	□ 0, 1, #	□ 0, 1, #	$\uparrow$
	□ #	□ 1	$\rightarrow$
	□ #	□ #	$\rightarrow$

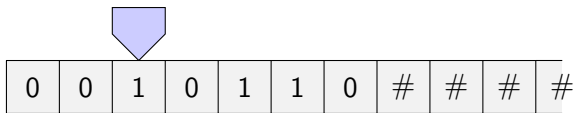
# Machine de Turing: représentation d'un programme. Exemple:

$n \mapsto n + 1$ :



$\delta :$		0			1	$\rightarrow$
		1			0	$\rightarrow$
		0, 1			0, 1	$\rightarrow$
		0, 1, #			0, 1, #	$\uparrow$
		#			1	$\rightarrow$
		#			#	$\rightarrow$

Machine de Turing: représentation d'un **programme**. Exemple:  
 $n \mapsto n + 1$ :

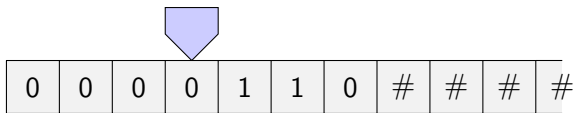


$\delta :$		0		1	$\rightarrow$
		1		0	$\rightarrow$
		0, 1		0, 1	$\rightarrow$
		0, 1, #		0, 1, #	$\uparrow$
		#		1	$\rightarrow$
		#		#	$\rightarrow$



# Machine de Turing: représentation d'un programme. Exemple:

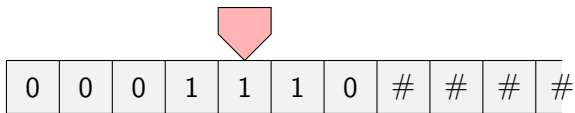
$n \mapsto n + 1$ :



$\delta$ :		0			1	$\rightarrow$
		1			0	$\rightarrow$
		0, 1			0, 1	$\rightarrow$
		0, 1, #			0, 1, #	$\uparrow$
		#			1	$\rightarrow$
		#			#	$\rightarrow$

# Machine de Turing: représentation d'un programme. Exemple:

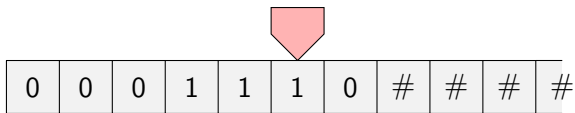
$n \mapsto n + 1$ :



$\delta :$	<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 0		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 1	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 1		<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 0	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 0, 1		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 0, 1	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 0, 1, #		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 0, 1, #	$\uparrow$
	<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> #		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> 1	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> #		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px;"></span> #	$\rightarrow$

# Machine de Turing: représentation d'un programme. Exemple:

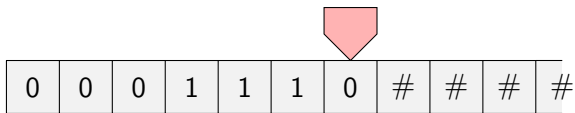
$n \mapsto n + 1$ :



$\delta$ :		0			1	$\rightarrow$
		1			0	$\rightarrow$
		0, 1			0, 1	$\rightarrow$
		0, 1, #			0, 1, #	$\uparrow$
		#			1	$\rightarrow$
		#			#	$\rightarrow$

Machine de Turing: représentation d'un **programme**. **Exemple:**

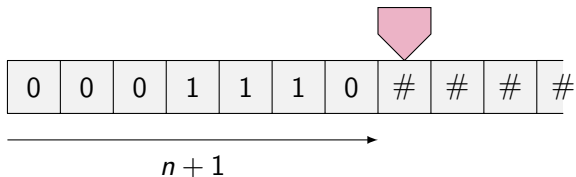
$n \mapsto n + 1$ :



$\delta$ :		0			1	$\rightarrow$
		1			0	$\rightarrow$
		0, 1			0, 1	$\rightarrow$
		0, 1, #			0, 1, #	$\uparrow$
		#			1	$\rightarrow$
		#			#	$\rightarrow$

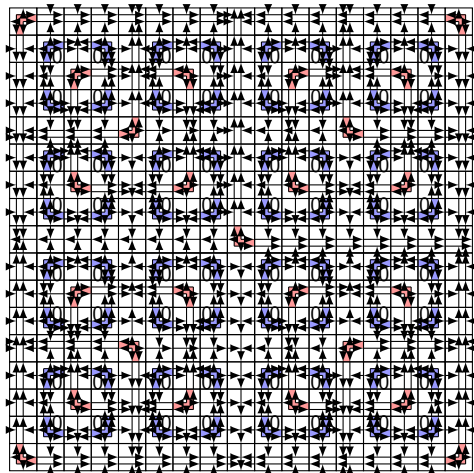
Machine de Turing: représentation d'un **programme**. **Exemple:**

$n \mapsto n + 1$ :

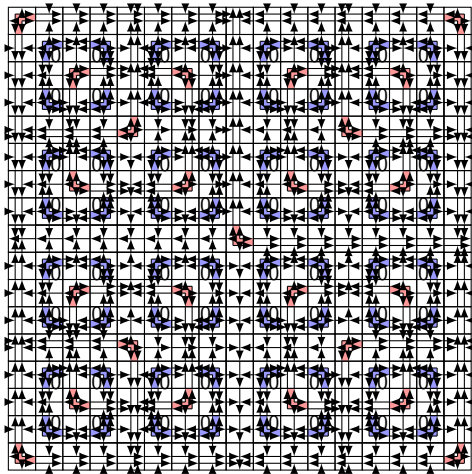


$\delta :$	<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 0		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 1	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 1		<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 0	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 0, 1		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 0, 1	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 0, 1, #		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 0, 1, #	$\uparrow$
	<span style="background-color: #ccccff; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> #		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> 1	$\rightarrow$
	<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> #		<span style="background-color: #ffcccc; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 20px; height: 20px; vertical-align: middle;"></span> #	$\rightarrow$

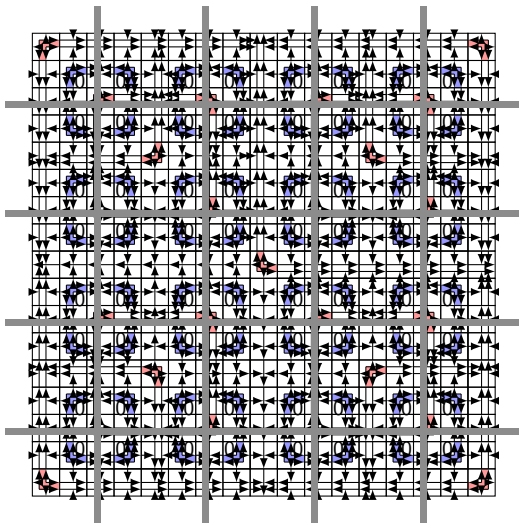
## Structures hiérarchiques: pavage de Robinson:



Ensembles de contrôle:



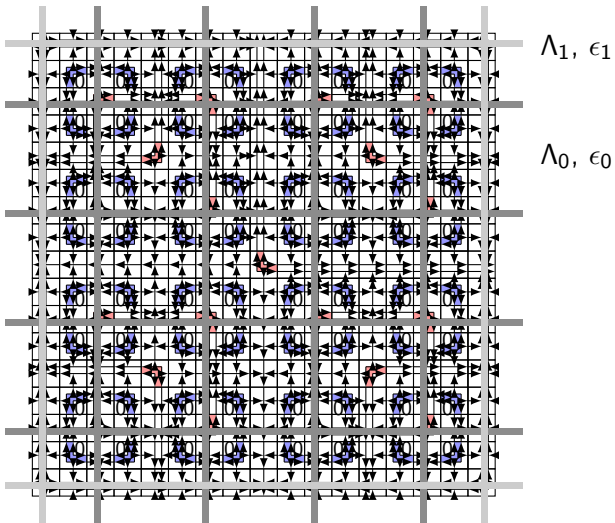
Ensembles de contrôle:



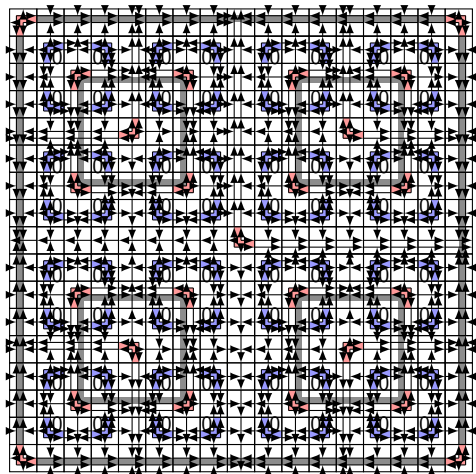
$\Lambda_0, \epsilon_0$



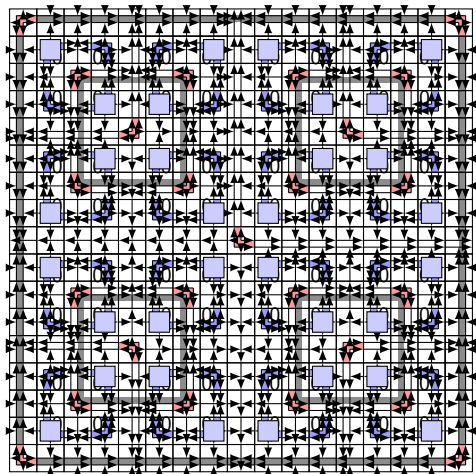
Ensembles de contrôle:



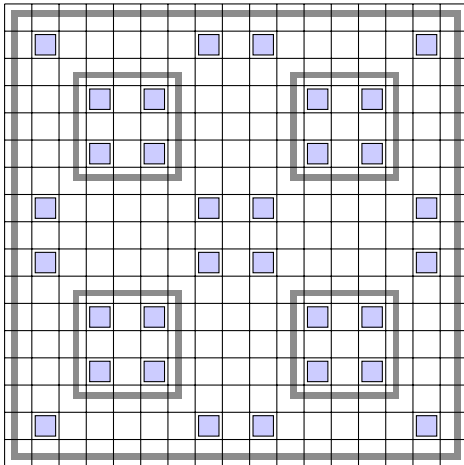
Cellules:



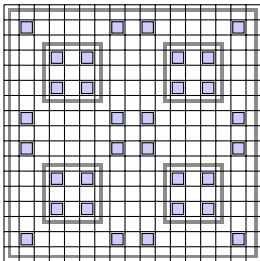
Cellules:



Cellules:

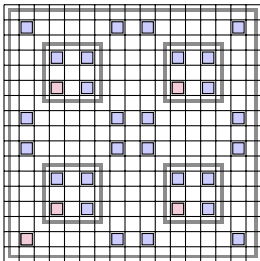


## Implémentation d'une machine:



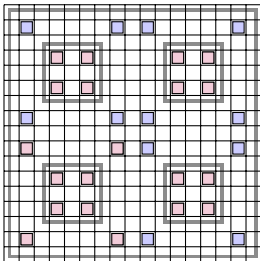
$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$q^2_{a_2}$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$q^1_{a_1}$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$q^0_{a_0}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$

## Implémentation d'une machine:



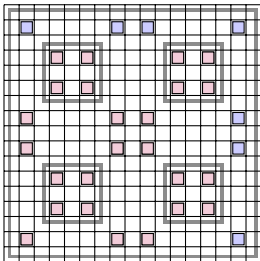
$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$q^2_{a_2}$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$q^1_{a_1}$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$q^0_{a_0}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$

## Implémentation d'une machine:



$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$q^2_{a_2}$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$q^1_{a_1}$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$q^0_{a_0}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$

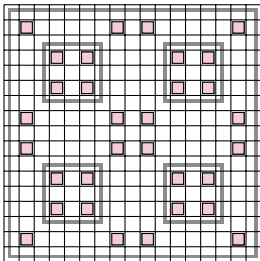
## Implémentation d'une machine:



$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h_{a_3}$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$q^2_{a_2}$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$q^1_{a_1}$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$q^0_{a_0}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$

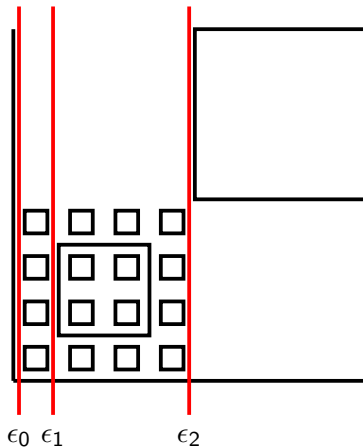


## Implémentation d'une machine:



$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h$ $a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$a'_2$	$q^h$ $a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$a'_1$	$q^2$ $a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a'_0$	$q^1$ $a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$q^0$ $a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$

Contrôle de la suite  $(\epsilon_n)_n$ :



On a  $h(X) = \sum_n \epsilon_n \cdot f_n$ , où  $f_n$  densité de  $\Lambda_n$ .

### III. Effet de contraintes d'assemblage

**Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?**

## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .

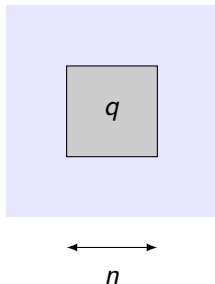
## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .



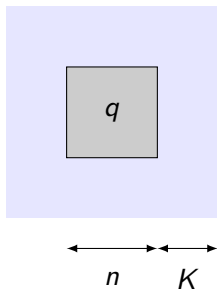
## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .



## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

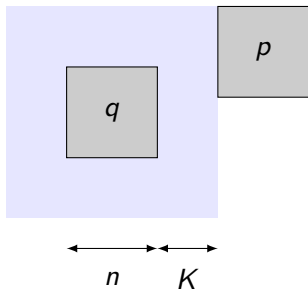
**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .





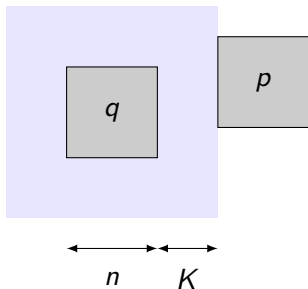
## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .



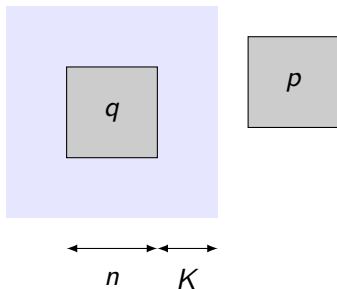
## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .



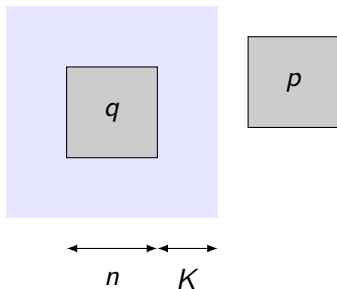
## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .



## Sous quelles contraintes (dynamiques) l'entropie devient-elle calculable?

**Exemple:** la propriété d'**assemblage à distance constante** [Pavlov, Schraudner 2015], calculable en temps  $2^{O(n^2)}$ .



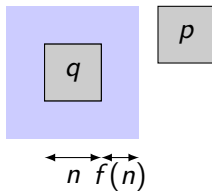
Effet de seuil?

Effet de seuil?

**Assemblage à distance  $f(n)$ :**

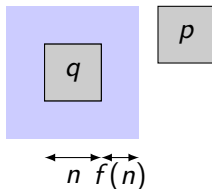
## Effet de seuil?

Assemblage à distance  $f(n)$ :



## Effet de seuil?

Assemblage à distance  $f(n)$ :



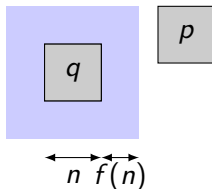
## Théorème (G., Sablik)

- 1 Les valeurs possibles de l'entropie pour les SFT à assemblage **linéaire** ( $f(n) = O(n)$ ) sont les nombres calculables par le haut.
- 2 Si  $f(n) = o(\log(n))$ , l'entropie est calculable.



## Effet de seuil?

Assemblage à distance  $f(n)$ :



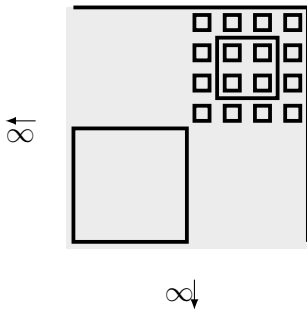
### Théorème (G., Sablik)

- 1 Les valeurs possibles de l'entropie pour les SFT à assemblage **linéaire** ( $f(n) = O(n)$ ) sont les nombres calculables par le haut.
- 2 Si  $f(n) = o(\log(n))$ , l'entropie est calculable.

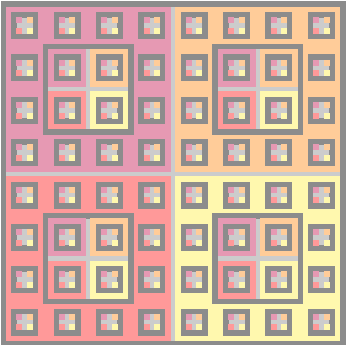
Réponse au **problème 9.1** de Hochman et Meyerovitch.

**Obstacles à cette contrainte** dans la construction de Hochman et Meyerovitch:

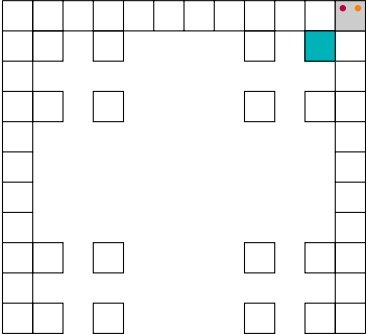
- 1 **Comportements dégénérés** des machines (zones infinies, sans initialisation).
- 2 **Rigidité** de la structure.



Simulation de comportement dégénérés, division fonctionnelle:

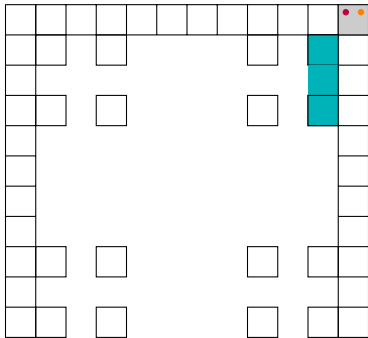


Signaux d'erreur:

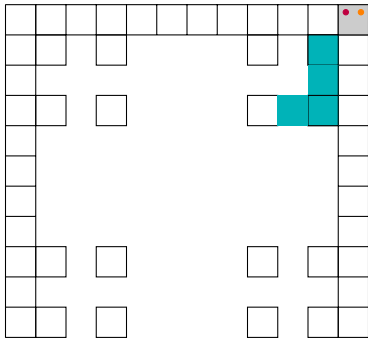




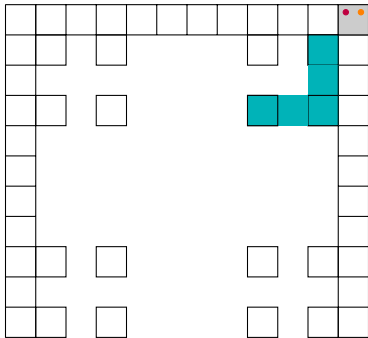
Signaux d'erreur:



Signaux d'erreur:

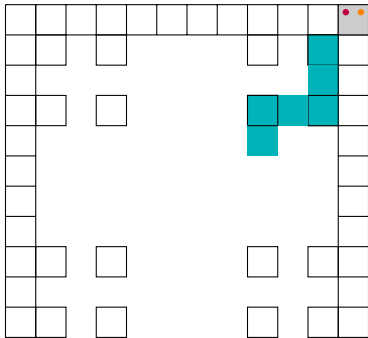


Signaux d'erreur:

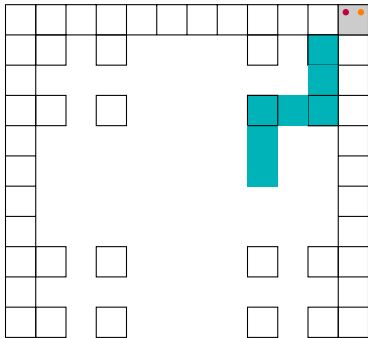




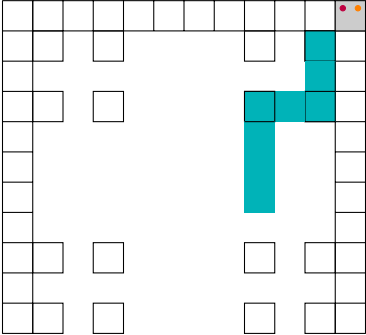
Signaux d'erreur:



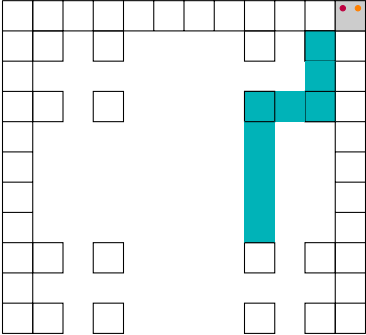
Signaux d'erreur:



Signaux d'erreur:

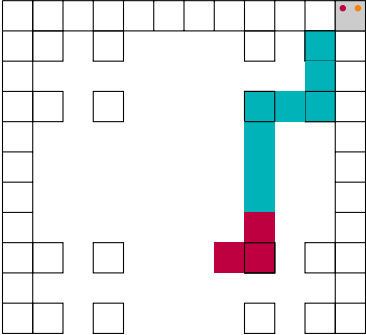


Signaux d'erreur:

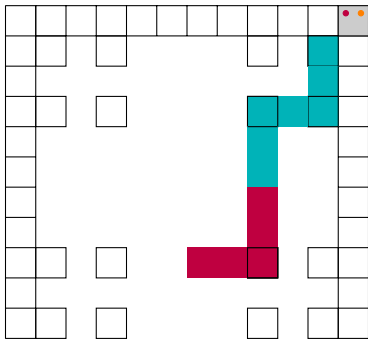




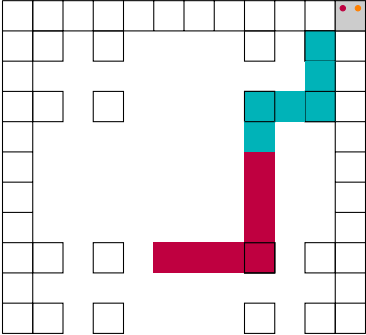
Signaux d'erreur:



Signaux d'erreur:



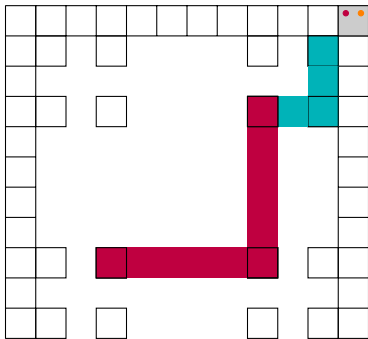
Signaux d'erreur:



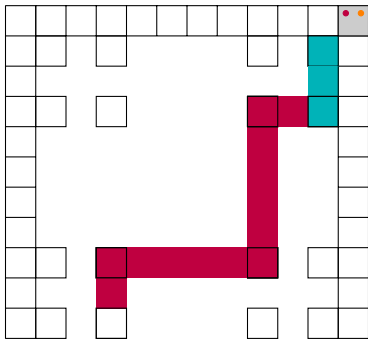




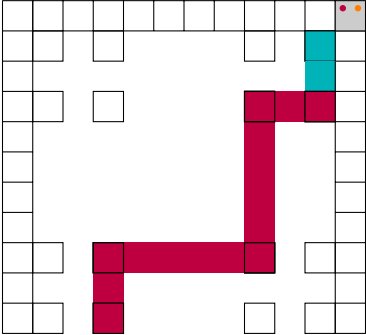
Signaux d'erreur:



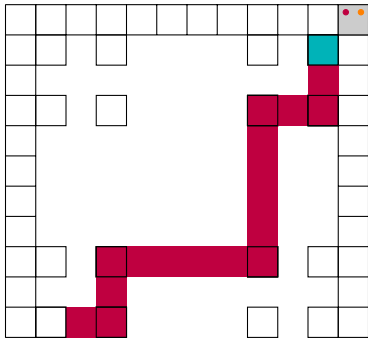
Signaux d'erreur:



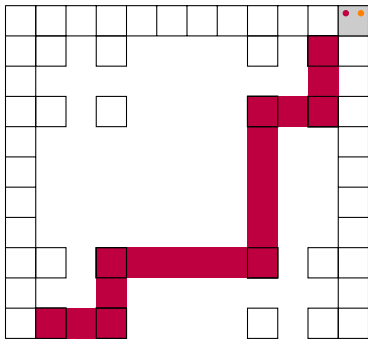
Signaux d'erreur:



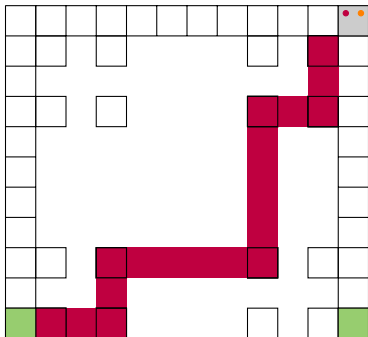
Signaux d'erreur:



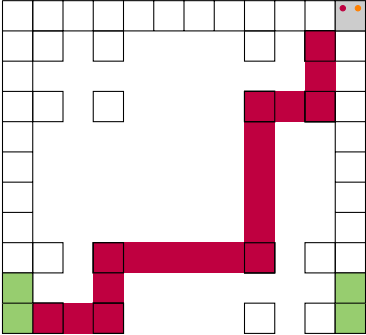
Signaux d'erreur:



Signaux d'erreur:

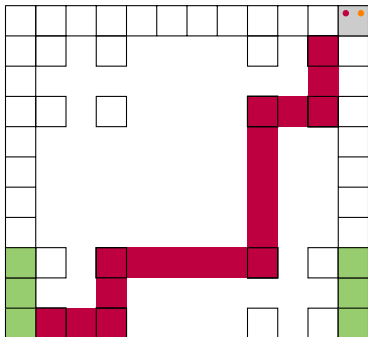


Signaux d'erreur:

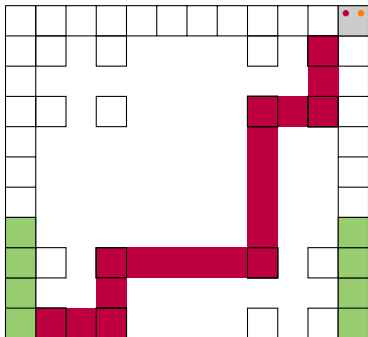




Signaux d'erreur:

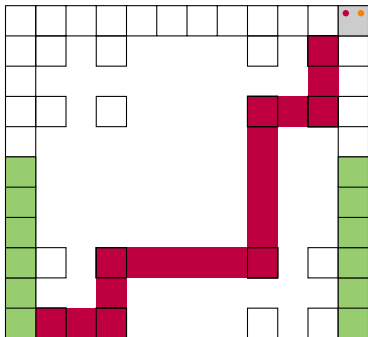


Signaux d'erreur:

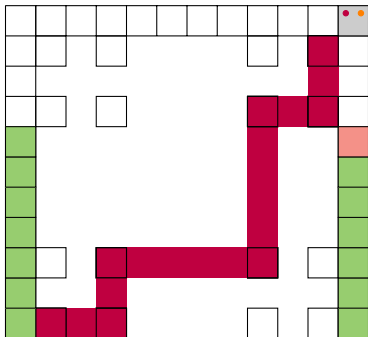




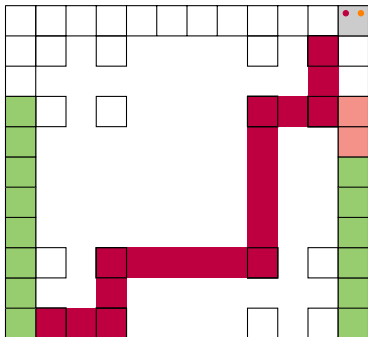
Signaux d'erreur:



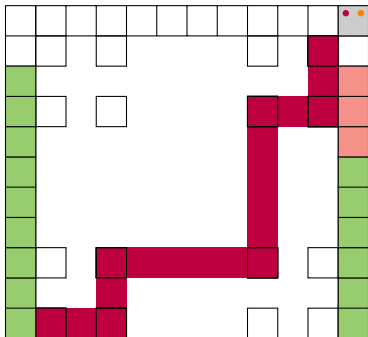
Signaux d'erreur:



Signaux d'erreur:



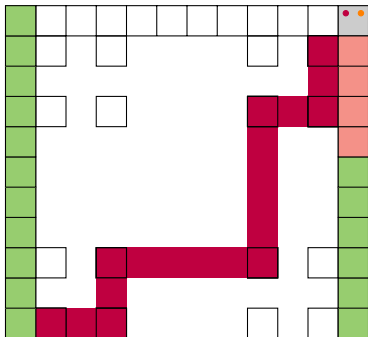
Signaux d'erreur:



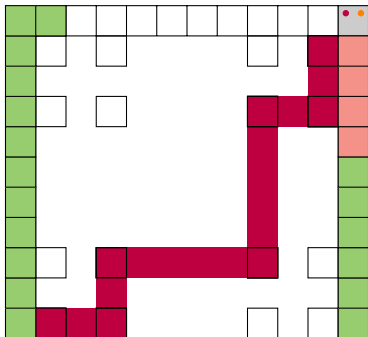




Signaux d'erreur:

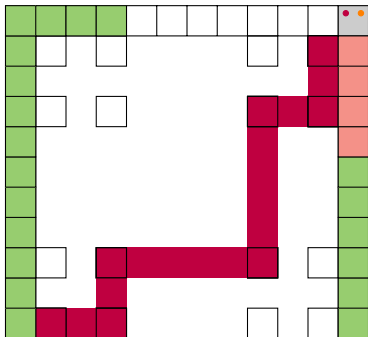


Signaux d'erreur:

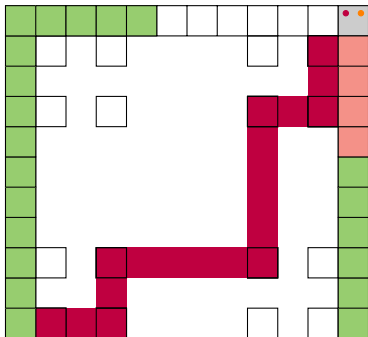




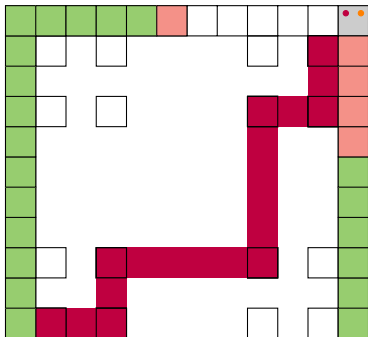
Signaux d'erreur:



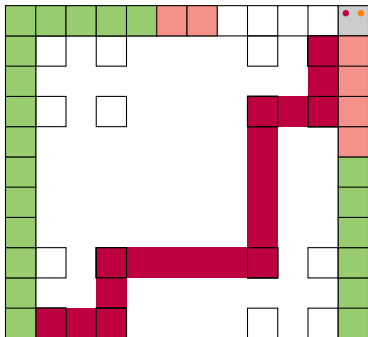
Signaux d'erreur:



Signaux d'erreur:



Signaux d'erreur:

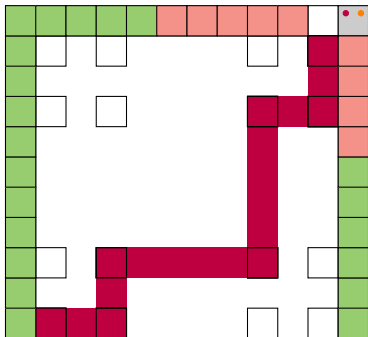




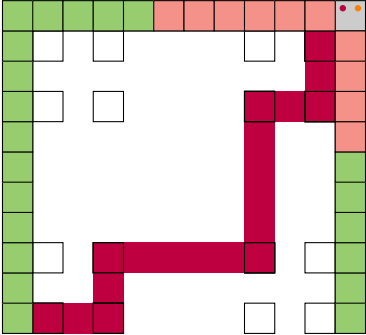




Signaux d'erreur:



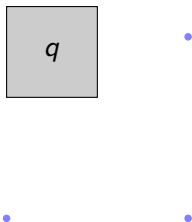
Signaux d'erreur:



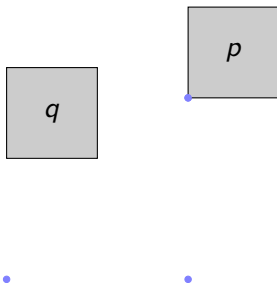
Assemblage sur réseau:



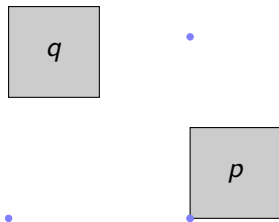
Assemblage sur réseau:



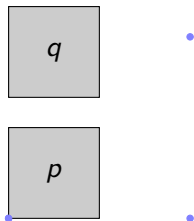
Assemblage sur réseau:



Assemblage sur réseau:

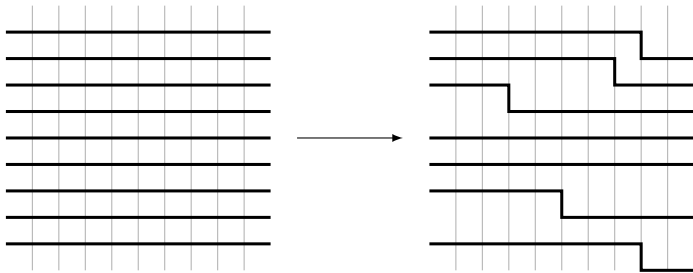


Assemblage sur réseau:





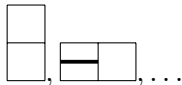
Principe de distorsion:



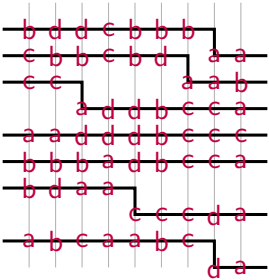
SFT  $\Delta$ ; symboles



Motifs interdits:

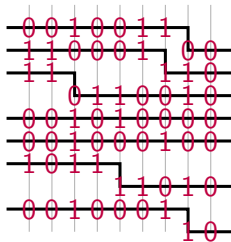


SFT  $X$  de symboles  $a, b, \dots$ , l'**opérateur de distorsion** donne le SFT:



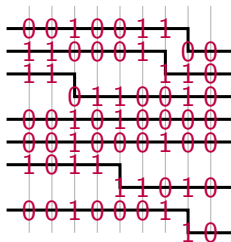
Assemblage linéaire, entropie inconnue.

Ajout de symboles aléatoires:



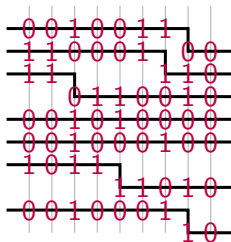
On a  $h(\mathcal{T}(X)) = h(X) + 1$ .

Ajout de symboles aléatoires:



On a  $h(\mathcal{T}(X)) = h(X) + 1$ . Segments rigides de taille fixe  $r$ :

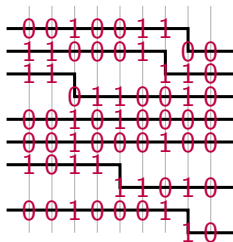
Ajout de symboles aléatoires:



On a  $h(\mathcal{T}(X)) = h(X) + 1$ . Segments rigides de taille fixe  $r$ :



Ajout de symboles aléatoires:



On a  $h(\mathcal{T}(X)) = h(X) + 1$ . Segments rigides de taille fixe  $r$ :



on a:

$$h(\mathcal{T}_r(X)) = h(X) + \frac{\log(1+r)}{r}$$

## IV. Caractérisation d'un seuil

**Caractérisation d'un seuil sur  $f$ ?**



## Caractérisation d'un seuil sur $f$ ?

Pour les **sous-shifts décidables** (n'inclus pas les SFT):

### Théorème (G., Hellouin)

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  croissante.

- ①  $\sum_n \frac{f(n)}{n^2} < +\infty$  et vitesse calculable: entropie calculable.
- ②  $\sum_n \frac{f(n)}{n^2} = +\infty$ : valeurs possibles: nombres calculables par le haut.

## Caractérisation d'un seuil sur $f$ ?

Pour les **sous-shifts décidables** (n'inclus pas les SFT):

### Théorème (G., Hellouin)

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  croissante.

- ①  $\sum_n \frac{f(n)}{n^2} < +\infty$  et vitesse calculable: entropie calculable.
- ②  $\sum_n \frac{f(n)}{n^2} = +\infty$ : valeurs possibles: nombres calculables par le haut.

## Existence d'un seuil pour les SFT multidimensionnels?

## Caractérisation d'un seuil sur $f$ ?

Pour les **sous-shifts décidables** (n'inclus pas les SFT):

### Théorème (G., Hellouin)

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  croissante.

- ①  $\sum_n \frac{f(n)}{n^2} < +\infty$  et vitesse calculable: entropie calculable.
- ②  $\sum_n \frac{f(n)}{n^2} = +\infty$ : valeurs possibles: nombres calculables par le haut.

## Existence d'un seuil pour les SFT multidimensionnels?

Caractérisation des entropies pour  $f$  en dessous du seuil ?

**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 ...

**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 ...

**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 ...

**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 ...

**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 ...



**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 ...

**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 ...

**Obstruction:** généralisation de Pavlov et Schraudner.

**Réalisation:** sous-shifts à densité bornée [Stanley]:

$$X_p = \{u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |u|_{n, n+m}^1 \leq p_m\}$$

$$p_3 = 2$$

0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 ...

## V. Autres résultats et perspectives

Sous-shift **minimal**: tous les motifs observables apparaissent dans toutes les configurations.

**Dimension entropique:**

$$D_h(X) = \lim_n \frac{\log_2 \circ \log_2(N_n(X))}{\log_2(n)}$$

**Théorème (Meyerovitch 2011)**

*Les valeurs possibles de la dimension entropique pour les SFT tridimensionnels sont les nombres limite-calculables dans  $[0, 3]$ .*

**Théorème (G., Sablik)**

*Sous contrainte de minimalité, ces nombres sont les limite calculable dans  $[0, 2]$ .*

## Perspectives et commentaires:

- ① Comparaison avec la construction par point fixe: densité du calcul.

## Perspectives et commentaires:

- ① Comparaison avec la construction par point fixe: densité du calcul.
- ② Calcul explicite d'entropie: SFT  $\Delta_r$ .

## Perspectives et commentaires:

- ① Comparaison avec la construction par point fixe: densité du calcul.
- ② Calcul explicite d'entropie: SFT  $\Delta_r$ .
- ③ Formes de l'implémentation du calcul sous contrainte:



## Perspectives et commentaires:

- ① Comparaison avec la construction par point fixe: densité du calcul.
- ② Calcul explicite d'entropie: SFT  $\Delta_r$ .
- ③ Formes de l'implémentation du calcul sous contrainte:
  - centralisation de l'information codante [assemblage]

## Perspectives et commentaires:

- ① Comparaison avec la construction par point fixe: densité du calcul.
- ② Calcul explicite d'entropie: SFT  $\Delta_r$ .
- ③ Formes de l'implémentation du calcul sous contrainte:
  - centralisation de l'information codante [assemblage]
  - information codante/non codante [minimalité]

## Perspectives et commentaires:

- ① Comparaison avec la construction par point fixe: densité du calcul.
- ② Calcul explicite d'entropie: SFT  $\Delta_r$ .
- ③ Formes de l'implémentation du calcul sous contrainte:
  - centralisation de l'information codante [assemblage]
  - information codante/non codante [minimalité]
  - quantification des échanges d'information locaux? [assemblage]

Merci de votre attention!